# MOŽNOSTI MODELOVANIA KOALIČNÝCH VZŤAHOV V TEÓRII HIER[1]

MARIÁN GOGA[2]

## The Possibilities of Modelling the Coalition Relationships in the Game Theory

**Abstract:** *In this paper the author focuses on the first part of the methodological problems of modelling situations in the game theory, which contain the non antagonistic conflict. It is a situation, in which the players' interests are not in direct contradiction. The victory of one participant does not imply the loss of the other participant of the game. In cooperative conflict, it is assumed that the players have the opportunity to conclude a binding agreement and can cooperate with each other. Having introduced the general conditions and axioms of rationality, which describe the features that the coalition structure should meet and their corresponding distributions of payments, in the second part of the paper, the author refers to the application of Shapley's value and methods of C-core in dealing with conflict situations in the context of cooperative games in telecommunications companies in Slovakia. The aim of the paper is to demonstrate the possibilities of the methodology of cooperative games analysis and those of their application for modelling and solving conflict decision-making situations and the formation of coalitions.*

**Keywords:** *game theory, cooperative game, coalition, strategy, the coalition structure, Shapley value, C-core method*

**JEL Classification:** C 71

[1] Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0351/17: *Aplikácia vybraných modelov teórie hier pri riešení niektorých ekonomických problémov Slovenska*.

[2] doc. Ing. Marián Goga, CSc., Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemská cesta 1/b, 852 35 Bratislava 5, e-mail: goga@euba.sk

## 1 Úvod

Základným cieľom analýzy v teórii hier je vybrať z množiny rôznych postupov čo najlepšiu možnosť (optimálnu) z hľadiska hry, teda určiť, ktorá stratégia je najlepšou odpoveďou na stratégiu zvolenú ostatnými účastníkmi hry. Existuje mnoho variantov hier, ktoré sú obsahom tejto vednej disciplíny. V niektorých hrách jeden účastník vždy vyhrá a druhý prehrá, v iných môžu vyhrať obaja. V článku sa metodologicky zameriame na tie situácie, ktoré obsahujú neantagonistický konflikt. To sú také situácie, v ktorých záujmy hráčov nie sú v priamom protiklade. Výhra jedného účastníka nie je prehrou iného účastníka hry. Tento typ kooperatívnej hry metodologicky uvedieme na modeloch rozhodovania v podmienkach nedokonalej konkurencie. Pri kooperatívnych konfliktoch predpokladáme, že hráči majú možnosť uzavrieť záväznú dohodu a môžu navzájom spolupracovať. To urobia vtedy, keď je pre nich spolupráca výhodná, teda pokiaľ majú obaja väčšiu výhru, ako keby nespolupracovali. Potreba kooperovať na trhu môže byť odlišná pre rôzne firmy, avšak ich hlavnými cieľmi je zvyčajne rozširovanie trhov, získanie konkurenčnej výhody alebo poznatkov v podobe know-how. Na základe analýzy tej-ktorej konfliktnej situácie a pochopenia správania sa jednotlivých účastníkov na trhu ponúka teória hier hráčom návod, akú najlepšiu stratégiu majú zvoliť. Nie vždy je však možné určiť „najlepšiu" stratégiu, v takom prípade teória hier aspoň poradí vybrať „lepšiu" stratégiu.

Za kooperáciu môžeme označiť spoluprácu firiem, ktoré si ponechávajú plnú hospodársku i právnu samostatnosť a združujú sa kvôli spoločnému vykonávaniu určitých operácií a kvôli dosiahnutiu spoločných cieľov. Toto združovanie (konzorcium, kartel, koncern, holding) sa realizuje na zmluvnom základe. Spolupráca podnikov sa realizuje častokrát na globálnej úrovni, keď podniky využívajú medzinárodné prostredie na realizáciu svojej konkurenčnej výhody. Pri vstupe na zahraničné trhy sú bežné podnikateľské činnosti ovplyvňované napríklad jazykovými rozdielmi, rozdielmi v správaní spotrebiteľov, rôznymi cenovými, platobnými, menovými podmienkami a pod.

V príspevku sa zameriame v prvej časti na metodologické problémy modelovania situácií v teórii hier, ktoré obsahujú neantagonistický konflikt. Po uvedení všeobecných podmienok a axióm racionality, ktoré opisujú, aké vlastnosti by mali spĺňať koaličné štruktúry a im zodpovedajúce rozdelenia platieb, uvádzame v druhej časti príspevku aplikáciu Shapleyho hodnoty a metódy *C*-jadra pri riešení konfliktných situácií v rámci kooperatívnych hier v oblasti telekomunikačných firiem na Slovensku. Cieľom príspevku je metodologicky ukázať možnosti analýzy kooperatívnych hier a možnosti ich využitia pri modelovaní a riešení konfliktných rozhodovacích situácií a vytváraní koalícií.

## 2 Metodologické predpoklady modelovania koaličných vzťahov

Predpokladáme situáciu, v ktorej môže *n* hráčov (účastníkov) navzájom spolupracovať a uzatvárať záväzné dohody o voľbe stratégií a o rozdeľovaní spoločne nadobudnutých výhier. V praxi existujú také situácie, v ktorých spolupráca hráčov v porovnaní so samostatným postupom zabezpečí hráčom výhodnejšie výsledky.

Množina hráčov $P = (1, 2, ..., n)$, ktorí v konfliktnej situácii postupujú spoločne pri voľbe stratégií na základe uzatvorenej dohody, sa nazýva *koalícia*.

Ak hráči v koalícii, ktorí v dôsledku spoločného postupu získavajú, vyplácajú (prerozdeľujú) ostatným hráčom, ktorí týmto spoločným postupom strácajú, nejaké kompenzácie, ide o *koalície s prenosnými platbami*.

Ak nedochádza v koalícii k prerozdeľovaniu platieb medzi hráčmi, ide o *koalíciu s neprenosnými platbami*.

Teraz uvedieme niekoľko dôležitých definícií a predpokladov, ktoré matematicky objasňujú koaličné chápanie vzťahov v niektorých štruktúrach [8, s. 123 – 138].

***Definícia 1***: Súbor neprázdnych podmnožín $B = (B_1, B_2, ..., B_k)$, pre ktorý platí $\bigcup_{j=1}^{k} B_j = P$, nazývame *koaličnou štruktúrou*. Ak pre koaličnú štruktúru $B$ platí $Bi \cap Bj = \emptyset$ (prázdna množina) pre všetky $i \neq j$, kde $i, j = 1, 2, ..., k$, potom ju nazývame *disjunktnou koaličnou štruktúrou* (každý hráč takejto koaličnej štruktúry je členom práve jednej koalície).

V opačnom prípade ide o *nedisjunktnú koaličnú štruktúru* (jeden hráč môže byť súčasne členom viacerých koalícií) [5].

Poznamenávame, že koalícia sa označuje zapísaním jej členov do zložených zátvoriek. Koaličná štruktúra sa označuje tak, že sa jednotlivé koalície zapíšu do okrúhlych zátvoriek. Napríklad v hre šiestich hráčov označuje {2, 3, 5} koalíciu druhého, tretieho a piateho hráča a zápis ({2, 3, 5}, {1, 4, 6}) označuje disjunktnú koaličnú štruktúru, ktorá sa skladá z dvoch koalícií: druhý, tretí a piaty hráč spolupracujú v jednej koalícii a prvý, štvrtý a šiesty hráč v druhej koalícii. V kooperatívnej hre n hráčov je možné vytvoriť $2^n - 1$ rôznych neprázdnych koalícií.

***Definícia 2:*** Nech je daná kooperatívna hra *n* hráčov v normálnom tvare:
$[P = \{1, 2, ..., n\}; X_1, X_2, ..., X_n; M_1, M_2, ..., M_n; K = (K_1, K_2, ..., K_k)]$,

kde: *P* je množina hráčov,

$X_i$ – množina stratégií hráča $P_i$,

$M_i$ – funkcia platieb hráča $P_i$,

*K* – množina prípustných koaličných štruktúr $K_1, K_2, ..., K_k$.

Potom:
- ak množinu prípustných koaličných štruktúr tvorí väčší počet koaličných štruktúr, ide o *hru s premenlivou koaličnou štruktúrou*,
- ak sa množina prípustných koaličných štruktúr skladá iba z jedného prvku, ide o *hru s fixovanou koaličnou štruktúrou*.

Kooperatívne hry *n* hráčov sa podľa prípustných koaličných štruktúr členia na tri skupiny:
1. Prvú skupinu tvoria hry, v ktorých sú prípustné všetky koaličné štruktúry s podmienkou, že ani jeden hráč nesmie byť súčasne v dvoch alebo viacerých koalíciách. Tieto hry sa nazývajú hrami s *voľnou disjunktnou koaličnou štruktúrou*.
2. V druhej skupine sú hry, v ktorých sú prípustné všetky koaličné štruktúry, aj také, v ktorých jeden hráč môže byť súčasne v niekoľkých koalíciách. Tieto hry sa nazývajú hrami s *voľnou nedisjunktnou koaličnou štruktúrou*.
3. Ak sa množina prípustných koaličných štruktúr *K* skladá z jediného prvku (hráča), ide o hru s *fixovanou koaličnou štruktúrou*. Takéto hry analyzuje *nekooperatívna teória hier*, pričom jediná prípustná koaličná štruktúra má tvar $(\{1\}, \{2\}, ..., \{n\})$. Ak hráči môžu tvoriť väčší počet koaličných štruktúr, ide o hru s *premenlivou koaličnou štruktúrou*.

Z uvedených skupín je v kooperatívnej teórii hier najlepšie teoreticky rozpracovaná skupina hier s voľnou disjunktnou koaličnou štruktúrou a s prenosnými platbami [1]. Priebeh takýchto hier spočíva v tom, že hráči vytvoria nejakú koaličnú štruktúru, členovia každej koalície sa dohodnú na voľbe spoločnej stratégie, ktorá im zabezpečí čo možno najvyššiu úhrnnú platbu koalície, a získanú platbu si po skončení hry medzi sebou rozdelia podľa vopred uzatvorenej záväznej dohody.

V kooperatívnej teórii hier sa na analytické účely často využíva hra v tvare *charakteristickej funkcie*.

***Definícia 3:*** Nech je daná množina hráčov $P = (1, 2, ..., n)$. *Charakteristickou funkciou* kooperatívnej hry sa nazýva reálna funkcia $v$ definovaná pre všetky podmnožiny $S \subset P$, ktorá má tieto vlastnosti:

a) $v(\emptyset) = 0$,

b) $v(S_1 \cup S_2) \geq v(S_1) + v(S_2)$,

pre všetky disjunktné dvojice $S_1$, $S_2 \subset P$. Dvojica $(P, v)$ sa nazýva *kooperatívna hra n hráčov v tvare charakteristickej funkcie*.

Poznamenávame, že každá funkcia definovaná na všetkých podmnožinách nejakej množiny, ktorá vyhovuje podmienke b), sa nazýva superaditívna. Ak vo vzťahu b) platí rovnosť, potom ide o aditívnu funkciu.

*Podstata* charakteristickej funkcie sa dá interpretovať takto: každej koalícii $S \subset P$ priraďuje charakteristická funkcia veličinu $v(S)$, ktorá vyjadruje „silu" koalície $S$. Táto veličina sa tiež nazýva *hodnota* koalície $S$. Vlastnosť a) z definície 3 vyjadruje, že hráči sa nikdy nezriekajú časti svojich platieb. Z vlastnosti b) vyplýva, že hodnota koalície, ktorá vznikne zjednotením dvoch disjunktných koalícií, nemôže byť menšia, ako je súčet hodnôt týchto dvoch koalícií, konajúcich samostatne („sila" celku nie je menšia ako „sila" jeho častí) [9, s. 277].

***Definícia 4:*** Kooperatívnu hru $(P, v)$ nazývame *nepodstatnou*, ak pre ľubovoľnú dvojicu disjunktných koalícií $S_1$, $S_2 \subset P$ platí: $v(S_1 \cup S_2) = v(S_1) + v(S_2)$. Ak tento vzťah neplatí, hovoríme o *podstatnej* hre.

*Kooperatívna teória hier* analyzuje predovšetkým *podstatné hry*, pretože nepodstatné hry sú hry s fixovanou koaličnou štruktúrou, v ktorých sú prípustné len jednočlenné koalície.

***Definícia 5:*** Kooperatívnu hru $(P, v)$ nazývame hrou *s konštantným súčtom* platieb, ak pre každé $S \subset P$ platí: $v(S) + v(P - S) = v(P)$.

V kooperatívnej hre s konštantným súčtom platieb sa úhrnný súčet platieb pri rozdelení všetkých hráčov do dvoch disjunktných koalícií nemení. Každá hra dvoch hráčov s konštantným súčtom platieb je nepodstatná a každá nepodstatná hra je hrou s konštantným súčtom platieb.

Poznamenávame, že v kooperatívnej hre s nekonštantným súčtom platieb sa skutočné správanie hráčov odlišuje od predpokladu, ktorý je základom na odvodenie charakteristickej funkcie z normálneho tvaru hry. Maximalizácia úhrnnej platby koalície (P – S) už nie je v tomto prípade totožná s minimalizáciou úhrnnej platby koalície S. Charakteristická funkcia preto už nevyjadruje správanie hráčov, ktoré by sa mohlo považovať za úplne rozumné. Aj vtedy však hodnota koalície poskytuje určitú informáciu o „sile" koalície a jej postavení v konfliktnej situácii.

V praxi sa dá charakteristická funkcia odvodiť aj v modeloch, ktoré nemajú na prvý pohľad charakter modelu hry [3 a 6].

## 3 Niektoré metódy riešenia koaličných vzťahov v kooperatívnej hre

V literatúre o teórii hier sa dá nájsť viacero koncepcií a prístupov k riešeniu kooperatívnych hier s prenosnou výhrou. Vo väčšine prípadov sa odčleňuje problematika konštrukcie charakteristickej funkcie a voľby stratégií od problematiky tvorby koalícií a prerozdeľovania výhry.

V tejto časti článku uvedieme niektoré koncepcie riešenia konfliktných situácií v kooperatívnej teórii. Najskôr však ukážeme, do akých výsledkov vyústi kooperatívna hra, ak sa jej účastníci správajú racionálne.

Uviedli sme už, že charakteristická funkcia poskytuje informáciu o stratégiách, ktoré sú pre každú koalíciu optimálne a o úhrnných platbách jednotlivých koalícií.

Modelovaním konfliktnej situácie pomocou kooperatívnej hry v tvare charakteristickej funkcie je výsledok určený *dvoma podmienkami* – vytvorením koaličnej štruktúry rozdelením hráčov do jednotlivých koalícií a rozdelením platieb hráčov vnútri každej koalície. V tejto súvislosti vzniká otázka: aké vlastnosti majú spĺňať koaličné štruktúry a im zodpovedajúce rozdelenia platieb, ktoré sa dajú v určitom zmysle považovať za „prijateľné" riešenia kooperatívnej hry? Teoretická analýza ponúka *dve všeobecné požiadavky*:

1. „Prijateľné" riešenia (výsledky) by mali vyhovovať určitým zdôvodniteľným axiómam racionality.
2. Každé z „prijateľných" riešení (výsledkov) by malo byť stabilné z hľadiska toho, že neexistujú dostatočné motívy na jeho zmenu.

Teraz uvedieme *základné axiómy racionality*, ktoré sa používajú v kooperatívnej teórii hier [9].

Nech $p_i$ vyjadruje tú časť z úhrnnej platby koalície, ktorú hráč $P_i$ dostane pri delení výhry. Z definície charakteristickej funkcie vyplýva, že pre ľubovoľnú koaličnú štruktúru ($B_1$, $B_2$, ..., $B_j$, ..., $B_k$) platí $\sum_{j=1}^{k} v(B_j) \leq v(P)$, pričom $v(P)$ predstavuje maximálnu sumu, ktorú hráči môžu medzi sebou rozdeliť.

Vektor $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$, ktorý predstavuje návrh na rozdelenie výhry medzi hráčmi, sa nazýva *rozdelením* v hre ($P$, $v$), ak platí $\sum_{i=1}^{n} p_i \leq v(P)$.

Či hráči pristúpia na spoluprácu, závisí od toho, ktoré z možných rozdelení sa nakoniec realizuje. Aby bolo rozdelenie **p** pre všetkých hráčov prijateľné, musí mať určité *vlastnosti*. Predovšetkým musí platiť $\sum_{i=1}^{n} p_i = v(P)$, t. j. musí byť rozdelená celá výhra. Rozdelenie s touto vlastnosťou sa nazýva kolektívne racionálnym (*axióma kolektívnej racionality*). V niektorej odbornej literatúre sa táto axióma nazýva *axióma paretovskej optimality*.

Ďalej musí platiť $p_i \geq v(\{i\})$, $i = 1, 2, ..., n$, pretože, ak by v jednom z týchto vzťahov platila obrátená nerovnosť, odmietol by príslušný hráč spoluprácu, lebo sám by si mohol zabezpečiť viac, ako by dostal pri rozdeľovaní výhry. Rozdelenie, ktoré spĺňa túto podmienku, sa nazýva individuálne stabilným (*axióma individuálnej racionality*).

V prípade, že žiadna subkoalícia $S'$ koalície $S$ nemôže zabezpečiť jej členom vyššie platby ako koalícia $S$, platí: $\sum_{i \in S} \mathrm{p_i} = v(S)$, pričom $\sum_{i \in S'} p_i \geq \mathrm{v}(S')$, pre všetky $S' \subset S$. Hovoríme, že rozdelenie **p** vyhovuje *axióme koaličnej racionality*, t. j., ak má uvedená sústava rovníc a nerovníc riešenie, *koalícia je stabilná*. Čiže, pri tomto rozdelení **p** neexistujú dôvody na rozpad koalície na menšie samostatné zoskupenia.

Ak predpokladáme, že pre nejakú koaličnú štruktúru $B = (B_1, B_2, ..., B_k)$ a vektor rozdelenia **p** platí $\sum_{i \in B_j} \mathrm{p_i} = v(B_j)$, $j = 1, 2, ..., k$, potom dvojicu $\{\mathbf{p}, B\}$ nazývame *formáciou platieb* v kooperatívnej hre ($P$, $v$).

***Definícia 6:*** Formáciu platieb $\{\mathbf{p}, B\}$ nazývame:

a) *individuálne racionálnou*, ak rozdelenie **p** je individuálne racionálne,
b) *kolektívne racionálnou* (paretovsky optimálnou), ak rozdelenie **p** je kolektívne racionálne (paretovsky optimálne),
c) *koaličné racionálnou*, ak rozdelenie **p** vyhovuje axióme koaličnej racionality vzhľadom na všetky koalície $B_j \in B$.

Každá koaličné racionálna formácia platieb je súčasne aj individuálne racionálna, neplatí to však opačne. Formácia platieb je kolektívne racionálna práve vtedy, ak platí $\sum_{j=1}^{k} v(B_j) = v(P)$.

***Definícia 7:*** Kolektívne a individuálne racionálne rozdelenie **p** sa nazýva *imputáciou*. Množina všetkých imputácií v hre $(P, v)$ sa označuje $E(v)$.

Každej imputácii sa dá priradiť aspoň jedna koaličná štruktúra tak, že výsledná formácia platieb je kolektívne a individuálne racionálna.

Predpokladajme, že **x** a **y** sú dve imputácie v kooperatívnej hre $(P, v)$. Nech sa hráči rozhodujú o voľbe jednej z nich. Ak $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, vždy existujú hráči, ktorí preferujú **x** pred **y**, a súčasne existujú hráči, ktorí preferujú **y** pred **x**. Z axiómy kolektívnej racionality (paretovskej optimality) vyplýva, že nikdy nemôže nastať prípad, v ktorom všetci hráči preferujú rovnakú imputáciu. Otázkou však je, či hráči, ktorí preferujú jednu z imputácií, majú dosť „sily“, aby si vynútili jej realizáciu.

***Definícia 8:*** Nech koalícia $S \subset P$ a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E(v)$. Hovoríme, že **x** *dominuje* **y**, resp. **x** *dom* **y** vzhľadom na koalíciu *S*, ak platí:

a) $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S),$

b) $x_i > y_i$ pre všetky $i \in S$.

Z definície vyplýva, že imputácia **x** je z hľadiska koalície *S* lepšia ako imputácia **y**, ak je dosiahnuteľná samostatným postupom koalície *S* (t. j. je *prípustná*) a ak všetkým členom koalície *S* zabezpečuje **x** vyššie platby ako imputácia **y**.

Ďalej stručne uvedieme *základné myšlienky* niektorých koncepcií riešenia kooperatívnych hier *n* hráčov:

**A.** Historicky prvým prístupom k analýze kooperatívnej hry *n* hráčov s prenosnými platbami boli princípy formulované *J. von Neumannom (1903*

*– 1957)* a *O. Morgensternom (1902 – 1977)* v ich prvej publikácii o teórii hier [11]. Východiskom ich prístupu je predpoklad o tom, že prijateľné sú iba individuálne a kolektívne racionálne formácie platieb.

***Definícia 9:*** Množina $V \subset E(v)$ sa nazýva *Neumannovým – Morgensternovým riešením* (skrátene N – M riešením), resp. *stabilnou množinou* kooperatívnej hry $(P, v)$, ak:

a) ľubovoľné dve imputácie z množiny $V$ sa navzájom nedominujú (*podmienka internej stability*),

b) pre každú imputáciu, ktorá nepatrí do množiny $V$, existuje aspoň jedna imputácia z $V$, ktorá ju dominuje (*podmienka externej stability*).

N – M riešenie možno interpretovať aj takto: každú imputáciu, ktorá nepatrí do $V$, možno vetovať pomocou niektorej imputácie z $V$. Imputácie z $V$ si medzi sebou nekonkurujú, žiadna koalícia nemá „silu“ vetovať imputáciu z $V$ inou imputáciou z tej istej množiny $V$. Uvedená definícia však nevylučuje možnosť existencie imputácie z množiny $V$, ktorú dominuje nejaká imputácia nepatriaca do tejto množiny [10, s. 145].

S aplikáciou N – M riešenia kooperatívnej hry súvisia aj niektoré problémy. Predovšetkým N – M riešenie, ak existuje, je vo všeobecnosti množinou s nekonečným počtom prvkov. N – M riešenie nie je určené jednoznačne, pretože pre tú istú hru môže byť viacero množín $V$, ktoré spĺňajú podmienky z definície 9, teda vo všeobecnosti existuje viacej N – M riešení. N – M riešenia môžu byť veľmi zložité množiny, takže ich explicitný opis je prakticky nemožný. Na druhej strane existujú hry, ktoré nemajú ani jedno N – M riešenie. Existencia N – M riešení sa vo všeobecnosti dokázala pre hru piatich hráčov. Neexistujú účinné metódy výpočtu, ktoré by umožnili opísať všetky N – M riešenia, alebo zistiť, či N – M riešenie existuje.

Vzhľadom na uvedené problémy a ťažko interpretovateľné vlastnosti N – M riešenia boli navrhované iné koncepcie riešenia kooperatívnych hier.

**B.** K zaujímavým výsledkom sa dopracoval *D. B. Gillies (1928 – 1975)* [7], ktorý vychádzal z logickej schémy N – M riešenia, t. j. z požiadavky kolektívnej a individuálnej racionality definovanej v kategóriách dominácie imputácií a odstránil niektoré nedostatky v N – M riešení. Zaviedol pojem *C-jadro* hry.

***Definícia 10:*** Nech $E(v)$ je množina všetkých imputácií kooperatívnej hry $(P, v)$. Podmnožina $C \subset E(v)$ všetkých nedominovaných imputácií sa nazýva

*C-jadrom* tejto hry.

Imputácie z *C*-jadra sa navzájom nedominujú. Imputácie, ktoré nepatria do *C*-jadra, nedominujú žiadnu imputáciu z *C*-jadra.

*C*-jadro ako riešenie kooperatívnej hry možno interpretovať takto: každá imputácia z *C*-jadra vyhovuje všetkým trom axiómam racionality, t. j. je individuálne racionálna, kolektívne racionálna a koaličné racionálna vzhľadom na koalíciu všetkých hráčov. Dá sa považovať za stabilnú v tom zmysle, že neexistuje koalícia, ktorá by mala „silu" ju zmeniť. Dohoda o rozdelení platieb a o spoločnom postupe, ktorá zodpovedá nejakému prvku z *C*-jadra, je prijateľná pre všetkých hráčov a pre všetky potenciálne koalície. Naproti tomu dohoda, v ktorej imputácia nie je prvkom *C*-jadra, je vetovaná aspoň jednou koalíciou, ktorá môže samostatným postupom získať viac [10, s. 147].

***Veta 1:*** *C*-jadro kooperatívnej hry $(P, v)$ sa vypočíta ako množina všetkých riešení sústavy lineárnych nerovníc:

$$\sum_{i\in S} x_i \geq \mathrm{v(S)} \text{ pre všetky } S \subset P,$$

$$\sum_{i\in P} \mathrm{x_i} = v(P).$$

Z uvedenej vety vyplýva, že *C*-jadro sa dá nájsť *metódami lineárneho programovania*. *C*-jadro je konvexným polyédrom a vhodne upravená simplexová metóda lineárneho programovania umožňuje nájsť krajné body príslušnej polyedrickej množiny, alebo zistiť, že sústava lineárnych nerovníc nemá riešenie.

Doterajšie poznatky z riešenia kooperatívnych hier však v odbornej literatúre potvrdzujú, že *C*- jadro kooperatívnej hry neposkytuje, podobne ako N – M riešenie, dostatočne všeobecné riešenie kooperatívnej hry, pretože existujú skupiny hier, ktoré majú prázdne *C*-jadro hry. Napríklad každá podstatná hra s konštantným súčtom platieb má prázdne *C*-jadro a neprázdnosť *C*-jadra nie je zaručená ani v podstatných hrách s nekonštantným súčtom platieb. V iných koncepciách riešenia kooperatívnych hier *n* hráčov sa preto upúšťa od používania imputácií.

**C.** Uvedené dve koncepcie N – M riešenia a *C*-jadra hry majú nevýhodu v tom, že neobjasňujú, čo sa počas skutočnej kooperatívnej hry deje. Predpokladajú, že všetci hráči vytvoria jedinú „veľkú“ koalíciu a problémy sa redukujú iba na úvahy ako rozdeliť platby v rámci tejto spoločnej koalície. Toto je implicitne zahrnuté v požiadavke *kolektívnej racionality* (paretovskej optimality).

Ďalšiu koncepciu, ktorá upúšťa od predpokladu kolektívnej racionality a vychádza z principiálne odlišnej logiky, vytvorili *R. J. Aumann (1930)* a *M. B. Maschler* v roku 1960 [2]. Túto koncepciu nazvali *vyjednávacia množina*.

Predpokladajme, že pri vzniku nejakej koaličnej štruktúry $B = (B_1, B_2, ..., B_j, ..., B_k)$ sa najprv v rámci každej koalície rokuje o rozdelení garantovanej úhrnnej platby medzi jej členov. Je zrejmé, že koalícia sa rozpadne, ak pre ňu neexistuje koaličné racionálne rozdelenie platieb. To znamená, že sa predpokladá vznik iba *koaličné racionálnych formácií platieb* $\{\mathbf{x}, B\}$.

Nech je vytvorená nejaká koaličné racionálna formácia platieb v tvare $\{\mathbf{x}, B\} = \{(x_1, x_2, ..., x_n); (B_1, B_2, ..., B_k)\}$. Vzniká otázka, ako sa správajú členovia jednotlivých koalícií.

Ako sme už uviedli, koaličná racionalita predstavuje určitý typ vnútornej stability koalície, pri ktorej neexistujú dôvody na rozpad koalícií na menšie zoskupenia. Môžu však vznikať iné procesy súvisiace s úvahami hráčov alebo skupín hráčov v koalícii o možnosti vystúpiť z koalície alebo pripojiť sa k inej koalícii [10, s. 149].

Predpokladajme, že $T = (T_1, T_2, ..., T_m)$ je nejaká koaličná štruktúra a $K$ je nejaká skupina hráčov. Množina $P(K, T) = \{i \in T_s, T_s \cap K \neq \phi\}$ sa nazýva *množinou partnerov* skupiny $K$ vzhľadom na koaličnú štruktúru $T$. Ľubovoľný $i$ – tý hráč je partnerom skupiny $K$, ak patrí do rovnakej koalície z koaličnej štruktúry $T$ ako niektorý z členov skupiny $K$.

***Definícia 11:*** Nech $\{\mathbf{x}, T\}$ je nejaká koaličné racionálna formácia platieb kooperatívnej hry $(P, v)$. Nech $K$ a $L$ sú neprázdne disjunktné podmnožiny nejakej koalície $T_s \in T$, t. j. $K, L \in T_s$, $K \cap\cap L = Ø$. *Námietkou* skupiny $K$ proti skupine $L$ nazveme koaličné racionálnu formáciu platieb v tvare: $\{\mathbf{y}, U\} = \{(y_1, y_2, ..., y_n); (U_1, U_2, ..., U_r)\}$, pre ktorú platí:

a) $P(K, U) \cap L = Ø$,

b) $y_i > x_i$ pre všetky $i \in K$,

c) $y_i \geq x_i$ pre všetky $i \in P(K, U)$.

Uvedená definícia v podstate vyjadruje, že hráči zo skupiny $K$ nie sú spokojní so svojimi podielmi na úhrnnej platbe koalície $T_s$. Vyhrážajú sa ostatným členom koalície, že v prípade, ak sa nezvýšia ich podiely, z koalície vystúpia. Túto hrozbu môžu však realizovať iba vtedy, ak môžu s hráčmi z ostatných koalícií (bez pomoci hráčov z $L$) vytvoriť takú koaličné racionálnu štruktúru, že v príslušnej formácii platieb môžu rátať s väčšími platbami, ako mali vo formácii $\{\mathbf{x}, T\}$, a pritom môžu ponúknuť svojim potenciálnym partnerom aspoň toľko, koľko mali vo formácii $\{\mathbf{x}, T\}$.

Uvedieme teraz, ako na takúto hrozbu môžu reagovať hráči zo skupiny $L$.

***Definícia 12:*** Nech $\{\mathbf{x}, T\}$ je koaličné racionálna formácia platieb kooperatívnej hry $(P, v)$.

Ďalej $K, L \in T_s$ a $\{\mathbf{y}, U\}$ je námietka $K$ proti $L$. *Protinámietkou* $L$ proti $K$ potom nazývame koaličné racionálnu formáciu platieb v tvare: $\{\mathbf{z}, V\} = \{(z_1, z_2, ..., z_n); (V_1, V_2, ..., V_t)\}$, pre ktorú platí:

a) $K \cap P(L, V) = \emptyset$,

b) $z_i \geq x_i$ pre všetky $i \in P(L, V)$,

c) $z_i \geq y_i$ pre všetky $i \in P(L, V) \cap P(K, U)$.

Túto definíciu možno interpretovať takto: členovia skupiny $L$ hovoria hráčom zo skupiny $K$: „Ak chcete realizovať svoju hrozbu, môžeme bez vašej pomoci vytvoriť takú koaličné racionálnu formáciu platieb, v ktorej si zabezpečíme aspoň také platby, ktoré sme mali vo formácii $\{\mathbf{x}, T\}$. Pritom zabezpečíme potenciálnym partnerom od vás, ktorých potrebujeme na vytvorenie novej formácie, aspoň také platby, ktoré by mali vo formácii $\{\mathbf{y}, U\}$. Teda existencia protinámietky blokuje možnosť realizovať námietku [9, s. 306].

Z uvedeného vyplýva, že *stabilnou* je taká koaličné racionálna formácia platieb, ak proti námietke nejakej skupiny hráčov $K$ proti ľubovoľnej skupine hráčov $L$ existuje protinámietka $L$ proti $K$.

*Vyjednávacou množinou M* je množina všetkých stabilných formácií platieb kooperatívnej hry $(P, v)$. Vyjednávacia množina je pre ľubovoľnú kooperatívnu hru $(P, v)$ neprázdna, pričom $C$-jadro hry (ak existuje) je vždy súčasťou vyjednávacej množiny.

Podrobnú analýzu vyjednávacej množiny, jej vlastností, modifikácií a numerické odvodenie možno nájsť v niektorých publikáciách z teórie hier [2].

**D.** Na odlišných princípoch, ako sme uviedli v predchádzajúcich koncepciách, navrhol v roku 1953 *L. S. Shapley (1923 – 2016)* koncepciu riešenia kooperatívnej hry ($P$, $v$), ktorej základom je tzv. *Shapleyho hodnota hry*. Táto koncepcia vychádza z apriórneho ocenenia pozície a „sily" každého hráča z hľadiska možností koaličnej spolupráce.

*L. S. Shapley* [12] navrhol charakterizovať očakávanú výhru každého z hráčov kooperatívnej hry v tvare charakteristickej funkcie so strednou hodnotou jeho prínosu do všetkých koalícií, ktorých môže byť členom. Každému hráčovi priradil v kooperatívnej hre ($P$, $v$) nejaké číslo $pi(v)$, ktoré nazval *hodnotou hráča Pi* v tejto hre. Vektor hodnôt jednotlivých hráčov $\mathbf{p}(v) =$

$= (p_1(v), p_2(v), ..., p_n(v))$ odvodil na základe týchto *predpokladov*: [9, s. 317]

1. Hodnota hráča závisí iba od charakteristickej funkcie, nie od označenia hráča. Ak majú dvaja hráči $i$ a $j$ v hre ($P$, $v$) také postavenie, že hodnota charakteristickej funkcie ľubovoľnej koalície sa nezmení, ak sa v tejto koalícii zamení hráč $i$ za hráča $j$, potom je hodnota hry pre obidvoch hráčov rovnaká.

2. Vektor hodnôt jednotlivých hráčov $\mathbf{p}(v)$ v kooperatívnej hre ($P$, $v$) je imputáciou.

3. Súčet dvoch charakteristických funkcií $u$ a $v$ kooperatívnych hier ($P$, $u$) a ($P$, $v$) je opäť charakteristickou funkciou $w = u + v$ nejakej novej kooperatívnej hry ($P$, $w$). Súčet vektorov hodnôt jednotlivých hráčov v hrách ($P$, $u$) a ($P$, $v$) sa potom rovná vektoru hodnôt v hre ($P$, $w$), teda $\mathbf{p}(w) = \mathbf{p}(u) + \mathbf{p}(v)$.

*L. S. Shapley* dokázal, že týmto trom predpokladom vyhovuje jediný vektor $\mathbf{p}(v)$ taký, že:

$$\mathbf{p_i}(v) = \sum_{\substack{s \in P \\ i \in S}} P(S)\left[v(S) - v(S - \{i\})\right], \qquad (1)$$

pričom $P(S) = \dfrac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}$, kde $|S|$ je počet prvkov množiny $S$. Suma v uvedenom vzťahu (1) sa uvažuje podľa všetkých koalícií, ktorých členom môže byť hráč $P_i$. Veličina $[v(S) – v(S–\{i\})]$ vyjadruje prínos hráča $P_i$ koalícii $S$ a veličina $P(S)$ vyjadruje pravdepodobnosti príslušných spôsobov vytvárania veľkej koalície všetkých hráčov.

Vektor $\mathbf{p}(v) = (p_1(v), p_2(v), ..., p_n(v))$ sa nazýva *Shapleyho vektor* alebo

*Shapleyho hodnota* kooperatívnej hry ($P$, $v$).

*Shapleyho hodnota* hráča $P_i$ predstavuje strednú hodnotu prínosu tohto hráča koalícii všetkých hráčov pri všetkých možných spôsoboch vytvárania veľkej koalície. Charakterizuje v určitom zmysle jeho „silu" z hľadiska možností spolupracovať s ostatnými hráčmi.

## 4 Praktická analýza Shapleyho hodnoty a *C*-jadra

V tejto časti článku poukážeme na dôležitosť koaličných vzťahov medzi firmami ako významného faktora, ktorý prispieva k úspechu firiem pri rozhodovaní v podmienkach nedokonalej konkurencie. Úspech firiem závisí predovšetkým od ich správania a rozhodovania o cieľoch či smerovaní firiem, ktoré sú náplňou práce manažérov na vyšších pozíciách hierarchickej štruktúry firmy.

Našu pozornosť zameriame na analýzu správania jednotlivých ekonomických subjektov, v našom prípade telekomunikačných firiem na území Slovenska a podáme vysvetlenie časti ich trhových stratégií pomocou kooperatívnej hry. Odvetvie poskytovateľov mobilných služieb predstavuje relatívne koncentrovaný homogénny oligopol, pretože popri veľkých spoločnostiach existuje v odvetví aj určitý počet malých a stredne veľkých firiem. Telekomunikačný sektor na Slovensku predstavuje zaujímavú oblasť na analýzu stratégií firiem v konkurenčnom prostredí pomocou poznatkov z teórie hier.

Spoluprácu a kooperáciu telekomunikačných firiem analyzujeme aplikáciou modelov a vzťahov z kooperatívnych hier. Zameriavame sa najmä na princíp Shapleyho hodnoty a *C*-jadra. V rámci analýzy hodnotíme výhody a nevýhody týchto prístupov a uvádzame hypotézy a závery, ktoré sú špecifické pre zvolené odvetvie telekomunikačných služieb.

Na analýzu sme vybrali z odvetvia poskytovateľov telekomunikačných služieb štyri výrazné spoločnosti, ktoré na Slovensku ponúkajú svojim zákazníkom predovšetkým telefónne služby, elektronické produkty, pripojenie k internetu, ako aj digitálnu či káblovú televíziu. Ide o spoločnosti: Slovak Telekom, a. s., Orange Slovensko, a. s., O2 Slovakia, s. r. o. a UPC Broadband Slovakia, s. r. o.

Výkonnosť firiem na Slovensku sa sleduje z hodnotenia ich schopnosti dosahovať prijateľnú úroveň finančných ukazovateľov, ako je napríklad zisková marža či podiel na trhu. Informácie o finančných ukazovateľoch, ktoré sme použili v aplikácii, sme získali z výročných správ firiem a internetových štatistických portálov. Niektoré údaje sme zovšeobecnili a upravili tak, aby ich bolo možné použiť na analýzu. Analýzu realizujeme za rok 2016.

Pri formulovaní modelu vychádzame z definície 2 a definície 3, ktoré vyjadrujú tvorbu koalície a superaditivitu ako výsledok optimalizácie marketingu a cenovej politiky v telekomunikačných službách.

Aby sme mohli modelovať reálnu situáciu, treba odhadnúť hodnotu koalície telekomunikačných firiem relatívne presne. Predpokladáme aj určité zjednodušenia, ktoré sú potrebné pri analýze. Napríklad väčšinu prevádzkových nákladov, ako je prenájom priestorov, náklady na energie a technická podpora pokladáme pri všetkých firmách za rovnaké. S rastom tržieb spoločností zvyknú tieto náklady klesať, avšak všetky štyri analyzované firmy sú také veľké, že tento efekt je minimálny. Pri tomto predpoklade môžeme uviesť, že ak sú náklady na výrobu a hardware v týchto firmách v prepočte na jedného klienta nízke, zisková marža je vhodným indikátorom pri marketingu v prepočte na jedného klienta.

Zisková marža je zisk z tržieb spoločnosti, vyjadrený v percentách. Čím vyššia je hodnota tohto ukazovateľa, tým má spoločnosť vyššiu ziskovosť v porovnaní s konkurenciou. Ziskovú maržu najviac ovplyvňuje cena tovaru, množstvo predaného tovaru, resp. služieb a výška nákladov firmy. Vypočítať sa dá zo vzťahu:

$$\textit{zisková marža} = \frac{\textit{čistý zisk}}{\textit{celkové tržby}} \,.\, 100\% \qquad (2)$$

Z uvedeného vzťahu (2) vypočítame ziskovú maržu pre jednotlivé telekomunikačné firmy za rok 2016. Potrebné hodnoty – čistý zisk a celkové tržby v mil. eur sú uvedené v tabuľke č. 1.

Tab. č. 1

**Hodnoty ziskovej marže v %**

| Firma | Čistý zisk | Celkové tržby | Zisková marža |
|---|---|---|---|
| Slovak Telekom, a. s. | 61,23 | 701,876 | 8,7238 % |
| Orange Slovakia, a. s. | 81,70 | 482,763 | 16,9234 % |
| O2 Slovakia, s. r. o. | 41,705 | 248,766 | 16,7648 % |
| UPC Broadband, s. r. o. | -0,938 | 47,105 | -1,9913 % |

**Prameň:** [14, 15] a vlastné výpočty.

Množina hráčov v normálnom tvare *P* obsahuje v našom prípade štyri firmy, ktoré spolu tvoria takmer celý telekomunikačný trh na území Slovenska. Ďalej definujeme vektor **t**, ktorý predstavuje trhový podiel operátorov v mil. eur v telekomunikačnom odvetví a vektor **z**, ktorý predstavuje ziskové marže jednotlivých telekomunikačných firiem v percentách. Trhový podiel vyjadruje mieru ekonomickej sily na trhu, ktorá umožňuje firme, resp. firmám, ktoré ju majú ovplyvňovať ceny služieb. Tento pojem sa často používa na telekomunikačnom trhu.

Číselné hodnoty podielu firiem na trhu v roku 2016 sú uvedené v tabuľke č. 2 a percentuálne podiely sú v grafe č. 1.

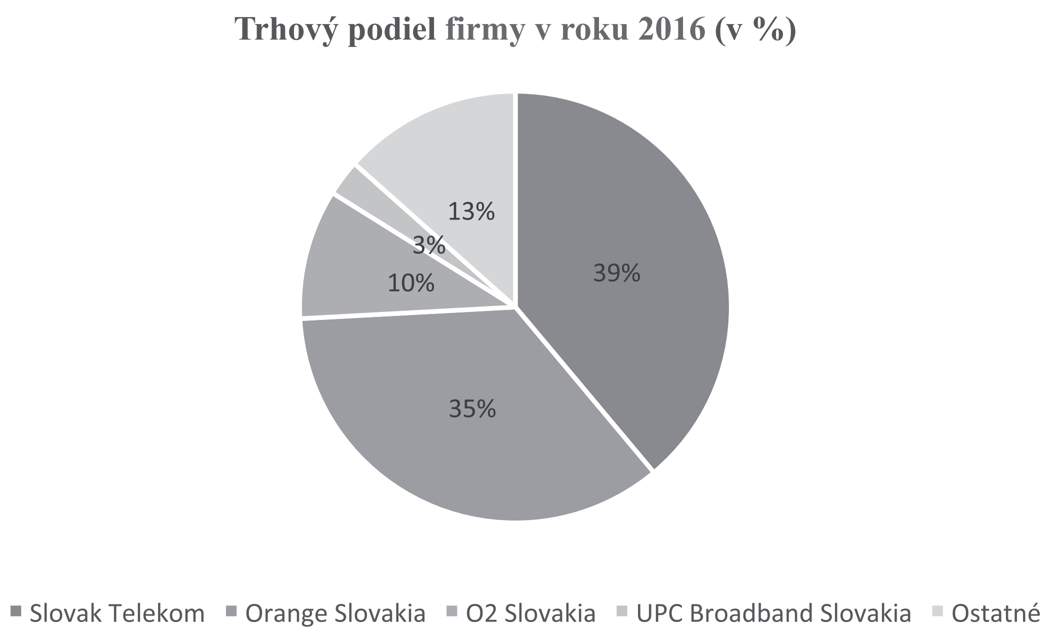
Tab. č. 2

**Podiel firmy na trhu v roku 2016**

| | |
|---|---|
| Slovak Telekom, a. s. | 963 mil. eur |
| Orange Slovakia, a. s. | 872 mil. eur |
| O2 Slovakia, s. r. o. | 241 mil. eur |
| UPC Broadband, s. r. o. | 67 mil. eur |
| Ostatné | 332 mil. eur |

**Prameň:** [14, 15] a vlastné výpočty.

Graf č. 1




**Prameň:** [14, 15] a vlastné spracovanie.

Na analýzu potrebujeme poznať ešte jeden údaj – priemernú ziskovú maržu v odvetví služieb na Slovensku, ktorá bola v roku 2016 približne 6,45 % [15]. Odvetvie služieb sme zvolili kvôli analýze a porovnaniu ziskovosti s konkurenciou.

Z uvedených údajov môžeme vytvoriť koaličný model v tvare:

P = {Slovak Telekom, Orange Slovakia, O2 Slovakia, UPC Broadband Slovakia}

**t** = {963 mil., 872 mil., 241 mil., 67 mil.}

**z** = {8,7238 %, 16,9234 %, 16,7648 %, -1,9913 %}

Aby sa spravodlivo rozdelila utilita, ktorá plynie z vytvorenej koalície, zadefinujeme všeobecne Shapleyho vektor $\mathbf{p}(v) = (p_1(v), p_2(v), ..., p_n(v))$, ktorý každému hráčovi (operátorovi) v hre $(P, v)$ priradí číslo $p_i(v)$, ktoré vyjadruje Shapleyho hodnotu $i$-tého hráča, na základe upraveného vzťahu (1), t. j.:

$$p_{\mathrm{i}}(v) = \sum\nolimits_{i \in s} \frac{(n-S)!\,(S-1)!}{n!} . \left( v(S) - v\left(\frac{S}{\{i\}}\right)\right), \tag{3}$$

kde $v$ je hra v tvare charakteristickej funkcie s $P$ hráčmi, $S$ je koalícia zostavená z $n$ členov, do ktorej patrí hráč $i$. Kvôli stabilite koalície je nutné, aby všetky imputácie $x_n$ boli v jadre, teda musí platiť (definícia 8):

$$\sum_{i \in S} x_i \leq (\mathrm{S}),\ \ x_i > y_i \ \text{ pre všetky } i \in S.$$

Ak by táto podmienka neplatila, koalícia by zanikla. Hodnota $v(S)$ vyjadruje hodnotu koalície. K hodnote nami vytvorenej koalície, ako partnerstva voči iným telekomunikačným firmám, ktoré by potenciálne mohli na území Slovenska vyvíjať činnosť, sa dá uvedenými údajmi pomerne dobre priblížiť. V prípade rozpadu koalície by z toho vyplývajúci efekt nebol na jednotlivé firmy rovnaký. Firmy s väčším trhovým podielom by mali výraznú výhodu.

Na výpočet hodnoty koalície $v(S)$ potrebujeme zistiť hodnotu priemernej ziskovej marže koalície $S$ zo vzťahu (4), ktorú vypočítame metódou váženého priemeru podľa tržieb, t. j.

$$\textit{priemerná zisková marža koalície} = \sum\nolimits_{\mathrm{i}=1}^{4} \frac{\left(\mathrm{t_i}\, \mathrm{z_i^T}\right)}{\sum \mathrm{t_i}} (\%), \tag{4}$$

kde $t_i$ sú hodnoty trhového podielu operátorov, $z_i^T$ sú ziskové marže operátorov. Potom priemerná zisková marža koalície sa rovná 12,629 %.

Ďalej vyjadríme hodnotu $v(S')$ ako rozdiel priemernej ziskovej marže koalície *S* a priemernej ziskovej marže v sektore služieb, čím zároveň overíme superaditivitu. Vzťah (5) vyjadruje výpočet pridanej hodnoty koalície *S* podľa ziskovej marže v %, t. j.

$$v(S') = \sum_{i=1}^{4} \frac{\left(t_i z_i^T\right)}{\sum t_i} - 6{,}45\ (\%), \tag{5}$$

čiže $v(S') = 12{,}629\ \% - 6{,}45\ \% = 6{,}179\ \%$. To je rozdiel v ziskových maržiach, ktorý vyjadruje pridanú hodnotu koalície, čo znamená, že za podmienok ceteris paribus má koalícia vyššiu ziskovú maržu ako samostatne konajúce firmy.

Z iného pohľadu to znamená, že koalícia *S* má hodnotu 13 241,597 mil. eur ročne, čiže $v(S)$=

$= 6{,}179\ \%\ .\ \left(\sum_{i=1}^{4} t_i\right) = 6{,}179\ \%$ . (963 mil. + 872 mil. + 241 mil. + 67 mil.) = 13 241,597 mil. eur.

Hodnota firiem, podobne ako pri synergickom efekte, pri akvizícii vzrástla, čím sa v praxi potvrdila superaditivita kooperatívnej hry.

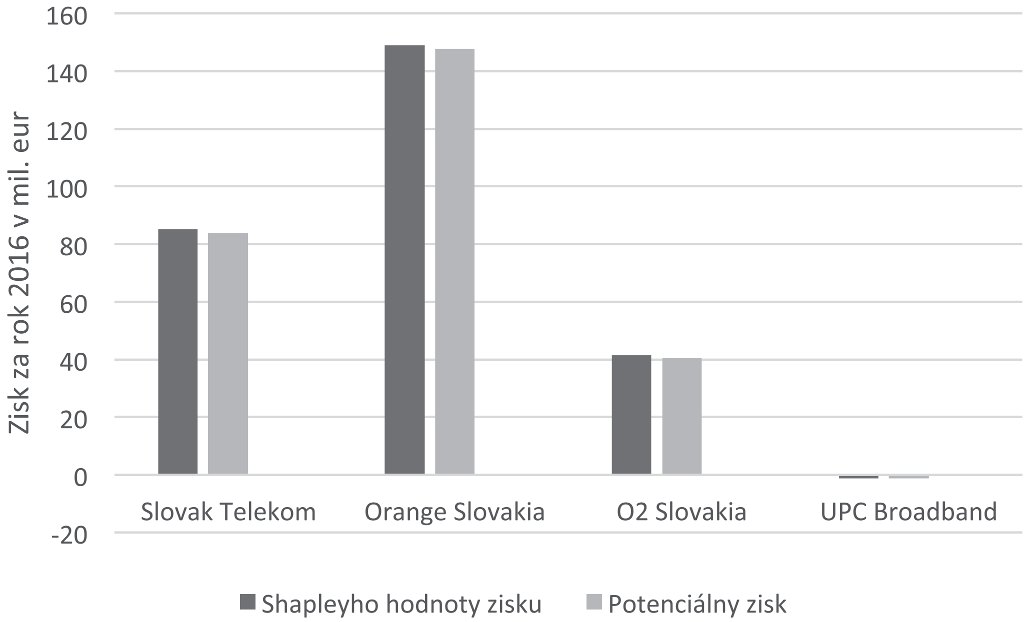
Ďalej sa zameriame na výpočet hodnôt v Shapleyho vektore $p_i(v)$, pričom zisk jednotlivých spoločností vyjadríme ako vektor s príslušnými komponentmi $t_i z_i^T$. Predpokladáme, že v prípade rozpadu koalície by mala telekomunikačná firma s rovnakými tržbami ziskovú maržu zodpovedajúcu hodnote 6,45 %. Zároveň predpokladáme, že počet zákazníkov jednotlivých firiem je v tomto štádiu telekomunikačného trhu konštantný, čo dáva validitu argumentu o použití ziskovej marže ako indikátora hodnoty koalície. Vystúpenie firmy z koalície indukuje pokles zisku z dôvodu vyšších nákladov na marketing, čo spôsobí vynakladanie tej istej sumy na kompenzáciu tohto efektu koalíciou, z ktorej firma vystúpila.

Shapleyho vektorom $\mathbf{p}(v)$, vypočítaným zo vzťahu (3), oceníme silu a postavenie každého hráča (firmy) z hľadiska kooperatívnej spolupráce. Výslednými hodnotami sú teoretické zisky v mil. eur jednotlivých hráčov v podmienkach kooperácie, t. j. $\mathbf{p}(v)$ = (85,12; 149,03; 41,34; -1,17).

Po výpočte komponentov vo vektore potenciálneho zisku (PZ) v mil. eur zo vzťahu $t_i z_i^T$, t. j. PZ = (84,01; 147,57; 40,40; -1,33) vidíme, že rozdiely medzi hodnotami v Shapleyho vektore a vektore potenciálneho zisku, t. j. (1,11; 1,46; 0,94; -0,16) sú zanedbateľné a vznikli zaokrúhľovaním hodnôt. Porovnanie týchto ziskových hodnôt je v grafe č. 2.

Graf č. 2

**Porovnanie Shapleyho hodnoty zisku a potenciálneho zisku**




**Prameň:** vlastné spracovanie.

Z porovnania vypočítaných hodnôt zisku vyplýva, že ak telekomunikačné firmy vystúpia z koalície, môžu očakávať pokles zisku. Avšak tento pokles je viditeľný najmä pri väčších firmách, ako je Slovak Telekom, Orange Slovakia a O2 Slovakia. Percentuálne porovnanie hodnôt Shapleyho vektora a potenciálneho zisku (1,3 %; 0,98 %; 2,27 %; -13,67 %) ukazuje, že ak by opustila koalíciu spoločnosť UPC Broadband, jej zisk by mohol vzrásť o 13,67 %.

Vypočítané hodnoty vedú k domnienke, že kooperácia firiem je viac-menej výhodnejšia pre väčšie spoločnosti, ktoré pôsobia v danom odvetví dlhší čas a ktorých zisk je aj pri samostatnej ekonomickej činnosti dostatočne vysoký. Aj keď sa menším firmám podarí spolupracovať s väčšími ekonomicky silnejšími firmami v rámci oligopolistickej štruktúry, z príspevku ekonomicky slabších firiem v koalícii profitujú najmä ekonomicky silnejšie firmy.

Z hľadiska definície 8 a z vypočítaných hodnôt môžeme konštatovať, že *C*-jadro koalície je relatívne stabilné, pretože interval medzi hodnotami spoločností danými Shapleyho vektorom a príslušnými hodnotami danými vzťahom pre jadro je pomerne široký, teda koalícia môže byť považovaná za stabilnú. Graf č. 2 túto stabilitu znázorňuje a aj keď je podhodnotenie príspevku spoločnosti UPC Broadband v koalícii veľké, v porovnaní s ostatnými firmami stabilita jadra ohrozená nie je.

Poznamenávame, že určitým nedostatkom teórie hier je, že aj pri relatívne málo rozmerných všeobecných úlohách je výpočet ekvilibria komplikovaný. Teória hier sa používa najmä ako nástroj na vysvetlenie a analýzu skutočností, ktoré sa už stali.

## 5 Záver

Ako ukazujú výsledky, firmy kooperáciou dokážu ročne zarobiť viac ako 13 241,597 mil. eur a hodnota koalície má potenciál byť omnoho vyššia. Kooperácia teda znamená spoločnú cenovú politiku, podobne ako pri oligopole, menej inovácií a menej marketingu ako pri vysokej miere konkurencie. To všetko prispieva k relatívne vyšším úsporám, ktoré sa do zisku výrazne premietajú.

Skúsenosti ukazujú, že sa kooperácii telekomunikačným firmám na Slovensku darí menej ako firmám v zahraničí. Priemerná zisková marža sa napríklad v USA pohybuje okolo 13 %, čo sa dá vysvetliť jednak väčším priestorom, na ktorom oligopol operuje, ale aj výrazne vyššou ochotou firiem riskovať, čiže prikloniť sa k riziku a vstúpiť do kooperácie s tým, že na začiatku spolupráce môže firma dosahovať stratu.

Nové regulácie Európskej únie situácii telekomunikačných firiem tiež nepomohli a určite boli faktorom pri znižovaní ziskových marží a zisku. Podľa Európskej únie je v Európe v porovnaní s USA a Čínou veľmi veľký počet telekomunikačných operátorov, čo sa môže v budúcnosti zmeniť. Na telekomunikačnom trhu na Slovensku môže preto dochádzať v blízkej budúcnosti k akvizíciám a zlučovaniu operátorov. [16] Tento trend je globálne viditeľný a s existenciou dostupného a rýchleho mobilného pripojenia na internet zisky týmto firmám systematicky klesajú. To robí vystúpenie z koalície relatívne náročným, pretože si vyžaduje pomerne vysoké investície. Tým sa ekvilibrium a *C*-jadro stávajú relatívne stabilnejšími.

V tomto príspevku uvedené metodologické problémy a koncepcie riešenia kooperatívnych hier nevyčerpávajú všetky existujúce prístupy a možnosti. V literatúre o teórii hier existujú aj ďalšie koncepcie, ktorými sa riešia kooperatívne hry. Napríklad koncepcia *K-jadra* hry vychádzajúca z podobných princípov ako *vyjednávacia množina*, ktorej autormi sú *M. Davis* a *M. B. Maschler* [4 a 9, s. 308 – 313]. V rámci tejto koncepcie autori upúšťajú od požiadavky koaličnej racionality a hľadajú stabilné výsledky medzi individuálne racionálnymi formáciami platieb. Táto koncepcia je prijateľná pre kooperatívne hry troch hráčov. Pri vyššom počte hráčov vznikajú problémy posudzovania „vyjednávacej pozície" väčších skupín hráčov.

Inú koncepciu predstavuje všeobecné riešenie kooperatívnej hry *n* hráčov s prenosnými platbami pomocou *N-jadra*, ktorú navrhol *D. Schmeidler (1939)* [13]. Koncepcia vychádza z predpokladu, že všetci účastníci kooperatívnej hry majú záujem dohodnúť sa o individuálne a kolektívne racionálnom rozdelení (t. j. imputácii), ktoré vyvolá v istom zmysle „najmenšie námietky" potenciálnych koalícií. Ide teda o *kompromisné riešenie* v rámci spolupráce všetkých hráčov.

Poznamenávame, že spracovanie aplikačných problémov na základe iných koncepcií spojených s riešením kooperatívnej hry *n* hráčov s prenosnými platbami a tvorbou koalícií je náplňou ďalšej etapy výskumu autora článku.

## Literatúra

[1] AUMANN, R. J. 1989. *Lectures on Game Theory*. Boulder: Westview Press, 1989.

[2] AUMANN, R. J. – MASCHLER, M. B. 1964. The Bargaining Set for Cooperative Games. In: DRESHER, M. – SHAPLEY, L. S. – TUCKER, A. W. (ed): *Advances in Game Theory*. (Annals of Mathematical Studies.) No. 52, Princeton: Princeton University Press, 1964, s. 443 – 476.

[3] BIERMAN, H. S. – FERNANDEZ, L. 2005. *Game Theory with Economic Applications*. Reading: Addison – Wessley, 2005.

[4] DAVIS, M. – MASCHLER, M. B. 1965. The Kernel of a Cooperative Game. In: *Naval Research Logistics Quarterly*. Vol. 3, No. 12, 1965, s. 223 – 259.

[5] DRESHER, M. – SHAPLEY, L. S. – TUCKER, A. W. (ed.) 1964. *Advances in Game Theory*. Princeton: Princeton University Press, 1964.

[6] DUTTA, P. K. 1999. *Strategies and Games: Theory and Practice*. Cambridge: MIT Press, 1999.

[7] GILLIES, D. B. 1959. Solutions to General Non-Zero-Sum Games. In: TUCKER, A. W. – LUCE, R. D. (ed.): *Contributions to the Theory of Games*. (Annals of Mathematics Studies.) Vol. IV, No. 40, s. 47 – 85. Princeton: Princeton University Press, 1959.

[8] GOGA, M. 2013. Teória hier. Bratislava: IURA EDITION, 2013, ISBN 978-80-8078-613-7.

[9] CHOBOT, M. 1973. *Teória hier*. Bratislava: ES VŠE, 1973.

[10] CHOBOT, M. – TURNOVEC, F. – ULAŠIN, V. 1991. *Teória hier a rozhodovania*. Bratislava: Alfa, 1991.

[11] NEUMANN, J. V. – MORGENSTERN, O. 1944. 2004. *Theory of Games and Economic Behavior*. Woodstock: Princeton University Press, 1944, 2004 (1953).

[12] SHAPLEY, L. S. 1953. A Value for n-Person Games. In: KUHN, H. W. – TUCKER, A. W. (ed.): *Contributions to the Theory of Games*, Vol. II. (Annals of Mathematics Studies 28.) Princeton: Princeton University Press, 1953, s. 307 – 317.

[13] SCHMEIDLER, D. 1969. The Nucleolus of a Characteristic Function Game. In: *SIAMJournal of Applied Mathematics*. Vol. 17, No. 6, 1969, s. 1163 – 1170.

[14] www.finstat.sk (18.9.2017)

[15] www.statistics.sk (11.7.2017)

[16] www.teleoff.gov.sk (12.9.2017)