KONŠTRUKCIA OPTIMÁLNEHO PORTFÓLIA SO STANOVENÝM KONŠTANTNÝM VÝNOSOM[1]

ANDREA KADEROVÁ[2] – MICHAL PÁLEŠ[3]

Construction of Optimal Portfolio with Determined Constant Yield

Abstract: *The practical application of the portfolio theory model apparatus depends, apart from mathematical and statistical tools as in particular linear algebra, correlation analysis and probability theory, also on the availability of tools for effective solution to specific tasks related to the selection of portfolio. This instrument can be for instance an appropriately selected software. Mathematically, these tasks are mainly of convex quadratic programming, which can be solved algebraically or numerically. In this paper, we use the R language in the implementation process of algebraic solution to the problem of optimal portfolio construction.*

Keywords: *portfolio theory, expected return, variance of portfolio, diversification*

JEL Classification: G 11, C 61

1 Úvod

Pri konštrukcii optimálneho portfólia sa nevyhneme využitiu matematicko-štatistických nástrojov, ktorými sú najmä: lineárna algebra, korelačná analýza a teória pravdepodobnosti. Veľmi dôležitá je ale aj existencia nástrojov na efektívne riešenie konkrétnych úloh výberu

[1] Príspevok je výsledkom riešenia projektu VEGA č. 1/0806/14: *Kalkulácia SCR na krytie rizík neživotného poistenia v súlade s potrebami praxe.*

[2] Mgr. Andrea Kaderová, PhD., Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, e-mail: andrea.kaderova@euba.sk

[3] Ing. Michal Páleš, PhD., Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, e-mail: michal.pales@euba.sk

portfólia. Jednou z možností je použitie dostupného softvérového prostredia. Z matematického hľadiska sú úlohy súvisiace s tvorbou efektívneho portfólia prevažne úlohami konvexného kvadratického programovania, ktoré možno riešiť algebricky, resp. numericky. Na záver poukážeme aj na možnosť využitia softvéru pri implementácii algebrického postupu riešenia daného problému a poukážeme na jeho výhody pri riešení praktickej úlohy výberu portfólia.

2 Rozptylové miery rizika portfólia

Optimálne zostavené portfólio môže byť menej rizikové v porovnaní s rizikom jednotlivých aktív, ktoré uvažované portfólio tvoria. Zo vzťahu pre výpočet očakávaného výnosu portfólia $\overline{r}_{portf}$ tvoreného dvoma aktívami *A a B s očakávanými výnosmi* $\overline{r}_A$ a $\overline{r}_B$.

$$\overline{r}_{portf} = w_1.\overline{r}_A + w_2.\overline{r}_B \tag{1}$$

a vzťahu na výpočet rozptylu výnosov $\sigma^2\left(\overline{r}_{portf}\right)$ tohto portfólia

$$\sigma^2\left(\overline{r}_{portf}\right) = w_1{}^2.\sigma_A^2 + w_2{}^2.\sigma_B^2 + 2.w_1.w_2.\sigma_A.\sigma_B.\rho_{AB} \tag{2}$$

je zrejmé, že riziko (na rozdiel od očakávaného výnosu), nie je priemerom rizík jednotlivých aktív portfólia. Ideálnou investíciou je teda portfólio zostavené z aktív, ktoré majú záporne korelované výnosy. Pri väčšom množstve aktív, ktoré tvoria portfólio, a pri členitejšom rozdelení pravdepodobnosti nie je na prvý pohľad jasné, či a ako sú výnosy aktív navzájom korelované. Zrejmé ale je, že tak ako sa vypočíta riziko jedného aktíva prostredníctvom štandardnej odchýlky, rovnako sa prostredníctvom štandardnej odchýlky vypočíta aj riziko portfólia viacerých aktív. Čím viac sú výnosy jednotlivých aktív korelované záporne, tým bude riziko portfólia menšie. Analytickým nástrojom na meranie tendencie pohybu dvoch náhodných veličín, v tomto prípade výnosov rizikových aktív, je korelačný koeficient

$$\rho_{i,j} = \frac{cov\left(\overline{r}_i, \overline{r}_j\right)}{\sigma_i \sigma_j}, \tag{3}$$

ktorý je symetrický a nadobúda hodnoty z intervalu $\langle -1;1 \rangle$, pričom nulový korelačný koeficient vypovedá o tom, že náhodné veličiny nie sú korelované.

Predpokladajme, že existuje *n* rizikových aktív. Nech každé rizikové aktívum *k* je opísané jeho náhodným výnosom r_k, ktorého očakávaná hodnota je $E(\bar{r}_k)$, a štandardná odchýlka je $\sigma(\bar{r}_k)$, kde $k = 1,2...,n$. Ak investor investuje zo svojho bohatstva podiel w_k do aktíva *k*, potom pre očakávaný výnos portfólia dostaneme

$$E\left(\bar{r}_{portf}\right) = E_{portf} = \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot E\left(\bar{r}_k\right) = \boldsymbol{w}^T \cdot \boldsymbol{E}, \tag{4}$$

kde $\boldsymbol{E}$ je *n*-rozmerný vektor očakávaných výnosov jednotlivých aktív. Pre rozptyl výnosov tohto portfólia platí

$$\sigma^2\left(\bar{r}_{portf}\right) = \sigma^2_{portf} = \boldsymbol{w}^T \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{w}, \tag{5}$$

kde $\boldsymbol{C}$ je kovariančná matica definovaná takto

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dá sa ukázať, že čím viac aktív bude tvoriť portfólio, tým menší bude rozptyl výnosov portfólia, pričom sa tento rozptyl bude približovať k priemernej kovariancii aktív. Z toho vyplýva, že riziko portfólia sa skladá z dvoch častí. Jedna časť sú rozptyly jednotlivých aktív, ich hodnota rastom počtu aktív v portfóliu konverguje k nule. Druhá časť je časťou kovariančných členov, ktorej hodnota rastom počtu členov konverguje k priemernej kovariancii. Časť rizika je teda možné znížiť, ale len po určitú hranicu.

3 Konštrukcia efektívnej množiny portfólií

Predpokladajme, že na trhu cenných papierov existujú tri aktíva, ktoré chceme zaradiť do svojho portfólia, pričom chceme, aby portfólio dosiahlo očakávaný výnos na stanovenej úrovni E_{portf} , samozrejme, pri minimálnom rozptyle výnosov vytvoreného portfólia (uvádza tiež [3]). Charakteristiky týchto aktív sú v nasledujúcich tabuľkách.

Tab. č. 1

Charakteristiky aktív trhu cenných papierov

AKTÍVUM	***očakávaný výnos***	***štandardná odchýlka***
dlhopisy	0,020	0,10
pokladničné poukážky	0,005	0,04
akcie	0,075	0,16

Tab. č. 2

Korelačné koeficienty

AKTÍVUM	***pokladničné poukážky***	***akcie***
dlhopisy	0,53	–0,17
pokladničné poukážky	1,00	0,08
akcie	0,08	1,00

To znamená, že $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3)^T$ a $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$, kde w_1 je podiel dlhopisov v portfóliu, w_2 je podiel pokladničných poukážok v portfóliu a w_3 je podiel akcií v portfóliu. Prvky $cov\left(\overline{r}_i, \overline{r}_j\right)$ kovariančnej matice $\boldsymbol{C}$ dostaneme využitím známych korelačných koeficientov ρ_{ij} a štandardných odchýlok σ_i, σ_j zo vzťahu

$$\rho_{ij} = \frac{cov\left(\overline{r}_i, \overline{r}_j\right)}{\sigma_i \sigma_j}.$$

V súlade s Markowitzovou teóriou optimalizujeme výber portfólia s najmenším možným rizikom pri vopred stanovenom výnose [2]. Teda riešime minimalizačnú úlohu

$$\min \sigma^2_{portf} = \boldsymbol{w}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{w}$$

s ohraničeniami (podmienkami):

Podmienka 1: $w_1 + w_2 + w_3 = 1$

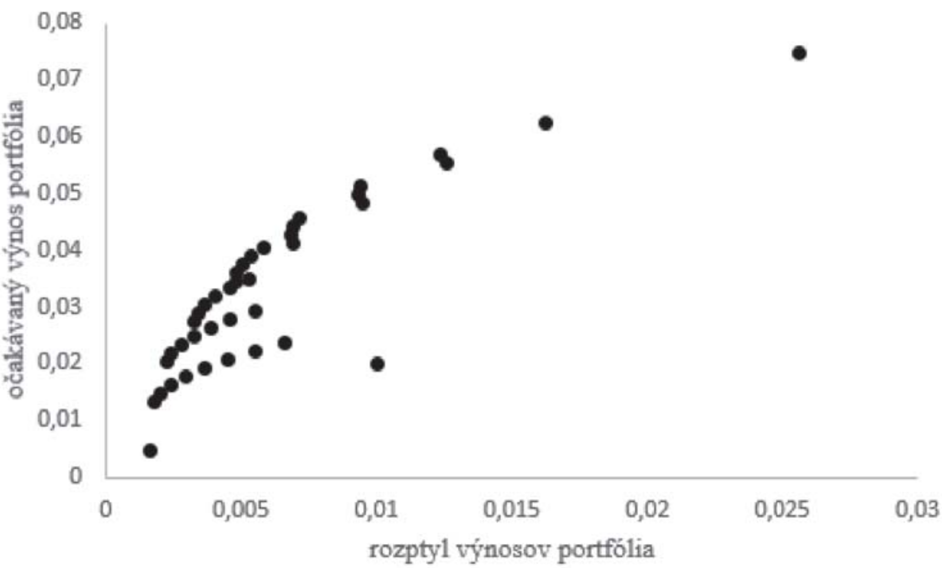
Podmienka 2: $E_1 w_1 + E_2 w_2 + E_3 w_3 = E_{portf}$

Prvá podmienka znamená, že súčet podielov jednotlivých aktív sa rovná jednej, a druhá súvisí s požiadavkou konkrétneho očakávaného výnosu konštruovaného portfólia.

Ak by sme uvažovali portfólio tvorené akoukoľvek kombináciou cenných papierov z tab. č. 1 (aj takých, ktoré by 100 percentným podielom tvoril iba jeden druh zo zvolených cenných papierov), tak vzťah medzi očakávaným výnosom takýchto portfólií a rozptylom týchto výnosov (= riziko portfólia), by sme mohli zobraziť podľa obr. č. 1. Teda je zrejmé, že pri rovnakom rozptyle výnosov, t. j. pri rovnakom riziku, je možné si vybrať viacero portfólií s rôznymi očakávanými výnosmi a je teda prirodzené vybrať si portfólio, ktoré je na každej kolmici na os *x* najvyššie. Dá sa ukázať, že portfóliá, ktoré pri rovnakom riziku prinášajú najvyšší očakávaný výnos, ležia na parabole, ktorej časť je aj „obalom" portfólií na obr. č. 1, podľa [5]. Vrchol tejto paraboly je bodom s globálne minimálnym rozptylom, ale, samozrejme, aj s nízkym výnosom (nie však s najnižším možným).

Obr. č. 1

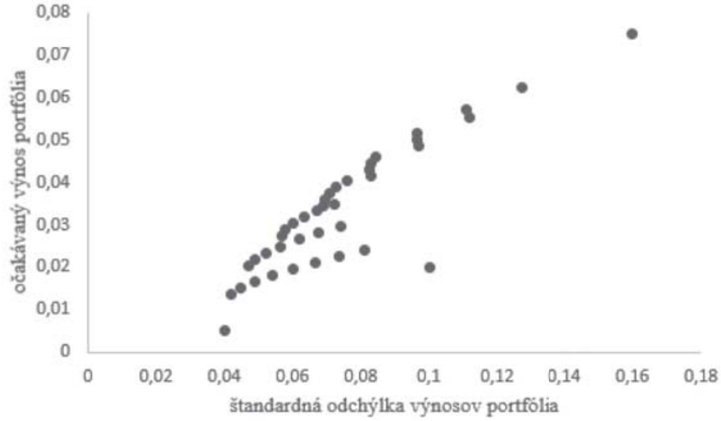
Prípustná množina portfólií (rozptyl – výnos)



Ak by sme rozptyl nahradili jeho druhou odmocninou, tak „obaľujúca" krivka, teda množina portfólií s najvyšším očakávaným výnosom pri konkrétnej výške rizika, bude hyperbola (obr. č. 2), podľa [5].

Obr. č. 2

Prípustná množina portfólií (štandardná odchýlka – výnos)



4 Výber portfólia s vybraným očakávaným výnosom v jazyku R

R je voľne dostupný jazyk (získať možno z [6]), používaný najmä v akademickej a vedeckej sfére. V akademickej sfére a súčasne v aktuárskej oblasti (poistno-matematické metódy zahŕňajúce okrem iného aj analýzu finančných trhov) rozvoj významne podporuje napr. Univerzita Heriot-Watt v Edinburghu. Ide o programovací jazyk špecializovaný predovšetkým na sofistikované štatistické výpočty. V štandardnej verzii, resp. v podporných balíčkoch (*add-packages),* je implementované veľké množstvo pokročilých funkcií, ktoré môže aktuár pri svojich analýzach využiť. Nemenej dôležitú úlohu v tomto programe zohráva veľmi precízne prepracovaný výstup s bohatou ponukou 2D aj 3D grafov, ktoré môžeme ľubovoľne ďalej upravovať (pridávať popisky, meniť farby, vzhľad, veľkosť...). Samozrejmosťou je aj možnosť vytvárať vlastné funkcie a skripty. R sa môže navyše použiť na výpočty diferenciálneho, integrálneho a maticového počtu, na prácu s vektormi, riešenie systému lineárnych rovníc a pod. (viac informácií je napr. v [4] a [5]).

Riešme pomocou jazyka R optimalizačnú úlohu formulovanú v bode 3. Nižšie uvádzame ad hoc napísaný program (zdrojový kód) .

```
E<- c(0.02,0.005,0.075)
SD<-c(0.1,0.04,0.16)
RO1<-c(0.53,1.00,0.08)
RO2<-c(-0.17,0.08,1.00)
Ep<-3.5
C<-
```

```
matrix(c(SD[1]*SD[1],SD[1]*SD[2]*RO1[1],SD[1]*SD[
3]*RO2[1],SD[1]*SD[2]*RO1[1],SD[2]*SD[2],SD[2]*SD
[3]*RO2[2],SD[1]*SD[3]*RO2[1],SD[2]*SD[3]*RO1[3],
SD[3]*SD[3]),3,3)
vEp<-c(Ep,1)
MEp<-cbind(vEp)
e<-c(1,1,1)
EeT<-rbind(E,e)
Ee<-cbind(E,e)
iC<-solve(C)
A1<-EeT%*%iC
A<-A1%*%Ee
w1<-iC%*%Ee
w2<-w1%*%solve(A)
w<-w2%*%MEp
K<-E%*%w
a<-A[1,1]
b<-A[1,2]
c<-A[2,2]
EG<-b/c
sigma2g<-1/c
if(round(sum(w)) == 1 & round(K[1,1],3)==Ep)
cat("OK") else cat("FALSE")
vEG<-c(EG,1)
MEG<-cbind(vEG)
wG<-w2%*%MEG
```

Potom riešenie – vektor váh s globálne minimálnym rozptylom získame po zadaní premennej *wG*, vektor váh pre konštantnú úroveň E_{portf}(w) a rovnako napríklad kovariančnú maticu ***C*** *(C)*, resp. inverznú kovariančnú maticu *(iC)*. Výsledné riešenie uvádza tab. č. 3.

Tab. č. 3

Výsledné riešenie analýzy

AKTÍVUM	***w***	***w***, ak E_{portf} = 3,5
dlhopisy	–0,05336241	45,88370
pokladničné poukážky	1,01944644	–84,98005
akcie	0,03391596	40,09635

Vektor ***w*** je stĺpcový vektor zložiek w_1, w_2, a w_3, označujúcich váhy (alebo podiely), ktoré investor viaže k *i*-temu aktívu v portfóliu (ich súčet je teda samozrejme 1). Podľa výsledkov v tab. č. 3 investor dosiahne stanovený výnos, ak uskutoční krátky predaj dlhopisu v uvedenom podiele (0,05336241). Práve záporné znamienko hovorí o krátkom predaji. Pôvodné prostriedky, a tie, ktoré vzídu z krátkeho predaja, potom investor využije na nákup pokladničných poukážok a akcií v podieloch uvedených v druhom stĺpci tab. č. 3.

5 Záver

Výstup používateľ dostane obratom po vložení zdrojového kódu do konzoly jazyka R. Meniacimi parametrami sú vstupné hodnoty podľa tab. č. 1 a tab. č. 2 (zložky vektora, v kóde sú vyznačené polotučne). Je zrejmé, že konštantnú hodnotu E_{portf} je potrebné zvoliť obozretne v kontexte s analyzovaným portfóliom. Z metodologického hľadiska je výhoda použitia jazyka R najmä v jednoznačnosti zadávania vstupov, teda používateľ vie pomocou príkazov v zdrojovom kóde sledovať postup riešenia, kým pri využití napríklad MS Excel by výstup pracovného hárka (printscreen) musel byť doplnený podrobnými komentármi. Aj táto výhoda robí z jazyka R vhodný riešiteľský nástroj v akademickej sfére pri tvorbe napr. riešených príkladov aj v off-line forme. Je potrebné však uviesť, že pre lineárne aj konvexné programovanie okrem štandardného rozhrania je možné do jazyka R doinštalovať doplnkové balíčky (napr. `lpSolve, Rmosek`), resp. pre konkrétne analýzy portfólia sa využívajú rôzne knižnice, napr. `Portfolio Analytics.` Tieto oblasti však v príspevku nerozoberáme – jazyk R je tu len výpočtovým prostredím. Uvedené riešenie je vhodné ako ukážka pre úvod do optimalizácie alebo numerických výpočtov v programe R v kontexte špecifickej analýzy portfólia.

Literatúra

[1] KADEROVÁ, A. – PINDA, Ľ. (2008): Štrukturálny prístup k meraniu kreditného rizika v exceli. In: *Evropské finanční systémy 2008. Brno: Masarykova univerzita.*

[2] MARKOWITZ, H. M. (1952): Portfolio Selection. In: *The Journal of Finance* 7.

[3] MARKOWITZ, H. M. (1959): Portfolio Selection. In: *Efficient Diversification of Investments*. New York: John Wiley & Sons.

[4] MARKOWITZ, H. M. – TODD, G. P. – SHARPE, W. F. (2000): *Mean-variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets.* New York: John Wiley & Sons.

[5] *MLYNAROVIČ, V. (2001): Finančné investovanie.* Bratislava: IURA EDITION.

[6] PÁLEŠ, M. (2016): Grafická podpora jazyka R pri štatistických analýzach. In: *Slovenská štatistika a demografia.* Bratislava: Štatistický úrad Slovenskej republiky. Roč. 26, č. 1.

[7] PÁLEŠ, M. (2014): Využitie software pri výučbe predmetov z oblasti aktuárstva. In: *MITAV* Brno: Univerzita obrany v Brně.

[8] R CORE TEAM. R. (2014): *A language and environment for statistical computing.* R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. *<http://www.R-project.org/>*.